EFECTOS TRANSITORIOS DE LA PENETRACION DE UNA BARRERA DE POTENCIAL

Juan Manuel Lozano

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México e Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(Recibido: Marzo 26, 1954)

RESUMEN

En este artículo se calculan los efectos transitorios de la penetración de una barrera de potencial, y se usa el resultado para interpretar los efectos transitorios de la dispersión por un potencial que han sido calculados en un artículo anterior.

I.- INTRODUCCION

En un trabajo anterior[1] se discutió el problema de la descripción dinámica de la dispersión nuclear por medio de un potencial de corto alcance según el formalismo general de la matriz S. El cálculo se efectuó usando una transformada generalizada que permitió encontrar una función de Green del problema, la cual fue evaluada explícitamente en términos de los polos de la función S. El estudio del efecto transitorio de la penetración de una barrera de potencial sirve para completar en cierto modo el trabajo anterior, pues permite interpretar físicamente los efectos transitorios de la dispersión. Aquí se estudia la penetración de una barrera de potencial según el formalismo general de la matriz S, y se establece la relación entre los polos de dicha matriz y los efectos transitorios de la penetración. Concretamente, el problema consiste en suponer un paquete de ondas inicialmente encerrado dentro de un potencial de corto alcance que, por simplicidad, se supondrá esféricamente simétrico; esto es, el potencial es de la forma

$$V(r) = \begin{cases} V(r) \neq 0 & r \leqslant a \\ 0 & r > a \end{cases} .$$

Se discutirá únicamente el caso de momento angular cero y todo el tratamiento será no relativista.

El estudio de la penetración de una barrera es análogo al de desintegración de un núcleo compuesto, caso que, en un artículo reciente[2], ha sido resuelto en un espacio de Fock convenientemente elegido.

Para conservar la analogía en el tratamiento con el problema de la dispersión por un potencial, se propone una solución mediante el uso de una transformada generalizada, aunque es posible seguir métodos más comunes como el de la transformada de Laplace.

II.- PLANTEAMIENTO Y SOLUCION DEL PROBLEMA

Considérese un potencial de la forma siguiente:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant r < a \\ V(r) & a \leqslant r \leqslant b \\ 0 & r > b \end{cases} .$$

La ecuación que satisface la función de onda ψ que describe al sistema es la ecuación de Schroedinger para momento angular cero y con simetría esférica, que es, en el sistema natural de unidades $\hbar = c = 1$,

$$- \tfrac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + V(r)\, \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} .$$

Haciendo el cambio de variable $\varphi = \psi r$, se tiene que la ecuación que satisface la funcion φ es

$$- \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + V(r)\, \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial t} . \tag{1}$$

Se define una función $u(\kappa, r)$ como la solución de la ecuación siguiente:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + [\kappa^2-2V(r)]\, u = 0 \qquad 0 \leqslant r < \infty \tag{2}$$

La función $u(\kappa,r)$ se usará para definir la transformada generalizada en la siguiente forma:

Si $f(r)$ es la forma inicial del paquete de ondas que está encerrado en el potencial, esto es, $\varphi(r,o) = f(r)$, se define la transformada del paquete como sigue:

$$F(\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(r)u^*(\kappa,r)dr \;, \quad f(r) = 0 \quad \text{si} \quad r > a \;. \tag{3}$$

La función de onda que describe el proceso es, con auxilio de la ecuación (3),

$$\varphi(r,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(\kappa)u(\kappa,r)\exp(-i\; \tfrac{1}{2}\; \kappa^2 t)\; d\kappa \quad . \tag{4}$$

Es conveniente desarrollar el paquete de ondas inicial en serie de Fourier:

$$F(r) = \sum_{n=1}^\infty g_n \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{a} \quad ,$$

donde el coeficiente g_n esta dado por

$$g_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a f(r) \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{a}\, dr \quad ,$$

de modo que substituyendo en la ecuación (3) se tiene

$$F(\kappa) = \sum_{n=1}^\infty g_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{a}\, u^*(\kappa,r)dr = \sum_{n=1}^\infty g_n G_n(\kappa) \;, \tag{3a}$$

donde las funciones $G_n(\kappa)$ son,

$$G_n(\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \operatorname{sen} \frac{n\pi r}{a} \, u^*(\kappa,r) \, dr \, . \tag{3b}$$

Ahora bien, en el intervalo $a \leqslant r \leqslant b$, la ecuación (2) tiene dos soluciones linealmente independientes[3] $w_1(\kappa,r)$ y $w_2(\kappa,r)$ que son funciones enteras cuyas derivadas son también funciones enteras. Las funciones $w_1(\kappa,r)$ y $w_2(\kappa,r)$ satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} w_1(\kappa,a) &= 1 \quad , \qquad w_2(\kappa,a) = 1 \quad , \\ w_1'(\kappa,a) &= -\tfrac{1}{2} \quad , \qquad w_2'(\kappa,a) = \tfrac{1}{2} \quad . \end{aligned} \tag{5}$$

La función $u(\kappa,r)$ queda definida en todo el intervalo $0 \leqslant r < \infty$ en la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} u(\kappa,r) &= A(\kappa) \operatorname{sen} \kappa r & r &< a \\ u(\kappa,r) &= B(\kappa)\, w_1(\kappa,r) + C(\kappa)\, w_2(\kappa,r) & a &\leqslant r \leqslant b \\ u(\kappa,r) &= -\frac{1}{2i}\left[\exp(-i\kappa r) - S(\kappa)\exp(i\kappa r)\right] & r &> b \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Con las condiciones de continuidad de la función $u(\kappa,r)$ y de su derivada en $r = a$ y $r = b$, es posible determinar las cuatro funciones $A(\kappa)$, $B(\kappa)$, $C(\kappa)$ y $S(\kappa)$.

Es, sin embargo, más útil definir la función $R(\kappa^2)$ en la forma siguiente:

$$R(\kappa^2) = \frac{u(\kappa,b)}{\left[\dfrac{du(\kappa,r)}{dr}\right]_b} \quad ; \qquad (7)$$

aprovechando la continuidad de la función $u(\kappa,r)$ y de su derivada en $r = b$, la función $R(\kappa^2)$ se expresa

$$R(\kappa^2) = \frac{i}{\kappa} \frac{\exp(-i\kappa b) - S(\kappa)\exp(i\kappa b)}{\exp(-i\kappa b) + S(\kappa)\exp(i\kappa b)}$$

de donde la función $S(\kappa)$ se expresa a su vez, en términos de la función $R(\kappa^2)$, como sigue:

$$S(\kappa) = \exp(-2i\kappa b) \frac{1 + i\kappa R(\kappa^2)}{1 - i\kappa R(\kappa^2)} \qquad (8)$$

Se puede demostrar[1] que la función $R(\kappa^2)$ es una función R de Wigner del argumento κ^2.

Las relaciones entre la función $R(\kappa^2)$ y la función $S(\kappa)$ y las propiedades de esta última que pueden deducirse de las propiedades de la primera, han sido muy estudiadas[4]; aquí solamente se indicaran los resultados principales, que son los siguientes:

1.- Los polos de la función $S(\kappa)$ estan en la parte inferior del plano complejo o sobre el eje imaginario.

2.- Los polos de la función $S(\kappa)$ estan simétricamente colocados respecto al eje imaginario.

3.- Para κ real, $S(\kappa)\, S^*(\kappa) = 1$.

4.- La función $S(\kappa)\exp(2i\kappa b)$ está acotada cuando $\kappa \to \infty$ en la parte superior del plano complejo.

Ahora bien, para κ real es inmediato que $u(\kappa,r)S^*(\kappa) = -u(-\kappa,r)$, y en consecuencia, de la ecuación (6) se sigue que $A(\kappa)S^*(\kappa) = A(-\kappa)$.

Volviendo a la ecuación (3b), usando la ecuación (6) se tiene que

$$G_n(\kappa) = A^*(\kappa) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi-\kappa a)}{\frac{n\pi}{a} - \kappa} - \frac{\operatorname{sen}(n\pi+\kappa a)}{\frac{n\pi}{a} + \kappa} \right] \tag{9}$$

Poniendo la función de onda $\varphi(r,t)$ en la forma

$$\varphi(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(r,t) \quad ,$$

se tiene que para $r > b$,

$$\varphi_n(r,t) = \frac{1}{\pi} g_n \int_0^{\infty} A^*(\kappa) \left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi-\kappa a)}{\frac{n\pi}{a} - \kappa} - \frac{\operatorname{sen}(n\pi+\kappa a)}{\frac{n\pi}{a} + \kappa} \right] \times$$

$$\times \left(-\frac{1}{2i}\right) [\exp(-i\kappa r) - S(\kappa)\exp(i\kappa r)] \exp(-i \tfrac{1}{2} \kappa^2 t)\, d\kappa \quad .$$

Puesto que sólo interesa el desarrollo en el tiempo del paquete de ondas fuera de la barrera de potencial, únicamente se calculará la expresión anterior, dejando sin encontrar explícitamente la función $\varphi_n(r,t)$ para $r < b$.

Para evaluar la integral anterior es conveniente separarla en la suma de dos integrales, una que contiene el término $\exp(-i\kappa r)$ y otra que contiene el término $S(\kappa)\exp(i\kappa r)$, esto es,

$$\varphi_n(r,t) = \frac{1}{\pi} g_n \int_0^{\infty} A^*(\kappa) \left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi-\kappa a)}{\frac{n\pi}{a} - \kappa} - \frac{\operatorname{sen}(n\pi+\kappa a)}{\frac{n\pi}{a} + \kappa} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{-1}{2i}\right) \exp(-i\kappa r) \exp(-i \tfrac{1}{2} \kappa^2 t)\, d\kappa \; +$$

$$+ \frac{1}{\pi} g_n \int_0^{\infty} A^*(\kappa) \left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi-\kappa a)}{\frac{n\pi}{a} - \kappa} - \frac{\operatorname{sen}(n\pi+\kappa a)}{\frac{n\pi}{a} + \kappa} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{+1}{2i}\right) S(\kappa) \exp(i\kappa r) \exp(-i \tfrac{1}{2} \kappa^2 t)\, d\kappa \quad .$$

Haciendo en la primera integral el cambio de variable $\kappa \to -\kappa$, se tiene la función $\varphi_n(r,t)$ expresada como integral de $-\infty$ a ∞:

$$\varphi_n(r,t) = \frac{1}{2\pi i} g_n \int_{-\infty}^{\infty} A^*(\kappa) \left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi-\kappa a)}{\frac{n\pi}{a} - \kappa} - \frac{\operatorname{sen}(n\pi+\kappa a)}{\frac{n\pi}{a} + \kappa} \right] \times$$

$$\times S(\kappa) \exp(i\kappa r) \exp(-i \tfrac{1}{2} \kappa^2 t)\, d\kappa \quad . \tag{10}$$

El integrando solo tiene polos en los polos de $S(\kappa)$, pues en $\pm \frac{n\pi}{a}$, $\dfrac{\operatorname{sen}(n\pi \pm \kappa a)}{\frac{n\pi}{a} \pm \kappa} \to a$ y en consecuencia no hay polos en $\pm \frac{n\pi}{a}$.

Definiendo la función $\Phi_n(\kappa)$ bajo la forma

$$\Phi_n(\kappa) = A^*(\kappa) \left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi-\kappa a)}{\frac{n\pi}{a} - \kappa} - \frac{\operatorname{sen}(n\pi+\kappa a)}{\frac{n\pi}{a} + \kappa} \right] S(\kappa) \quad , \tag{11}$$

la función de onda $\varphi_n(r,t)$ se expresa brevemente como sigue

$$\varphi_n(r,t) = \frac{1}{2\pi i} g_n \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\kappa) \exp(i\kappa r) \exp(-i \tfrac{1}{2} \kappa^2 t) \, d\kappa \quad ,$$

y esta integral puede evaluarse por el teorema de la convolución[5].

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(\kappa) \, \Phi_n(\kappa) \exp(-i\kappa r) \, d\kappa = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\eta) E(r-\eta) \, d\eta \quad ,$$

donde $\Phi_n(\eta)$ y $E(\eta)$ son las transformadas de Fourier de $\Phi_n(\kappa)$ y $E(\kappa)$ respectivamente. Poniendo $E(\kappa) = \exp(-i \tfrac{1}{2} \kappa^2 t)$ se obtiene[1]

$$E(x-\eta) = \exp(-i \tfrac{\pi}{4}) \sqrt{\frac{1}{t}} \exp\left[i \frac{(r-\eta)^2}{2t} \right] \quad ;$$

para calcular la función $\Phi_n(\eta)$, conviene distinguir dos casos[1]: $\eta > 0$ y $\eta < 0$. Si $\eta > 0$, $\Phi_n(\eta) = 0$ si se supone que no hay polos de la función $S(\kappa)$ sobre el eje imaginario, que físicamente corresponde a suponer que no se forman estados estacionarios. Para $\eta < 0$, suponiendo que la integral sobre un círculo que cierre el contorno por abajo y que no pasa por los polos de la función $S(\kappa)$, tiende a cero cuando el radio del círculo tiende a infinito, se obtiene

$$\Phi_n(\eta) = \sqrt{2\pi} \;\; i \sum_{\alpha=1}^{\infty} B_\alpha \exp(-i\eta\kappa_\alpha) \quad , \qquad \eta < 0$$

donde κ_α son los polos de la función $S(\kappa)$, las constantes

B_α son los residuos

$$B_\alpha = \text{Res}\ [\Phi_n(\kappa)]_{\kappa=\kappa_\alpha} \quad ,$$

y la suma se extiende sobre todos los polos de la función $S(\kappa)$.

Con los resultados anteriores, la función $\varphi_n(r,t)$ se puede expresar, en términos de la función $X(r,\kappa_\alpha,t)$ definida por Moshinsky[6], en la forma

$$\varphi_n(r,t) = \tfrac{1}{2}\, g_n \sum_{\alpha=1}^{\infty} B_\alpha\, X(r,\kappa_\alpha,t) \quad . \quad r > b \; . \tag{12}$$

III.- ESTADOS QUASI-ESTACIONARIOS EN LA DISPERSION POR UN POTENCIAL*

El resultado que acaba de ser encontrado en la sección II, permite interpretar los efectos transitorios de la dispersión por un potencial de corto alcance.

El problema de la descripción dinámica de la dispersión por un potencial de alcance b se resolvió mediante la introducción de una función de Green, que permite encontrar la función de onda dependiente del tiempo, según la ecuación

$$\psi(r,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(k)\ \Omega(r,k,t) k^2 dk \quad , \tag{13}$$

donde la función $F(k)$ es la transformada de Hankel de la forma inicial del paquete de ondas que se dispersa al incidir

*Para una mejor comprensión de esta sección, véase la referencia (1).

sobre el potencial, esto es,

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(r)\, j_0(kr)\, r^2 dr \quad , \tag{14}$$

donde $j_0(kr)$ es la función esférica[7] de Bessel de orden cero, esto es,

$$j_0(kr) = \frac{\text{sen } kr}{kr} \quad .$$

La función $\Omega(r,k,t)$ es la función de Green del problema y su valor explícito es

$$\Omega(r,k,t) = j_0(kr)\exp(-i\ \tfrac{1}{2}\ k^2 t) - \frac{b^2}{r} \sum_{a=1}^{\infty} A_a\ X(r-b,\kappa_a,t) \quad , \tag{15}$$

donde la suma se extiende sobre los polos de la función $S(\kappa)$ y los dos polos $\kappa = k$ y $\kappa = -k$.

Substituyendo la ecuación (15) en la ecuación (13), se obtiene

$$\psi(r,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(k)\ j_0(kr)\ \exp(-i\ \tfrac{1}{2}\ k^2 t)\ k^2\ dk -$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{b^2}{r} \sum_{a=1}^{\infty} \int_0^\infty A_a\ F(k) k^2\ X(r-b,\kappa_a,t)\ k^2\ dk \ .$$

Los coeficientes A_a son los residuos en los polos de una cierta función. Ahora bien, la función $X(r-b,-k,t)$ es muy pequeña para todo valor de t, de modo que tomando los valores asintóticos[1,8] de la función $X(r,\kappa,t)$ para $t \to \infty$, la función $\psi(r,t)$ se expresa

$$
\psi(r,t) \xrightarrow[\substack{t\to\infty \\ r>b}]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty F(k)\ [h_0^-(kr)+S(k)h_0^+(kr)]\ \exp(-i\ \tfrac{1}{2}k^2 t)k^2\, dk -
$$

$$
- \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{b^2}{r} \sum_\alpha A'_\alpha \exp(-i\ \kappa_\alpha b)\ \exp[i(\kappa_\alpha r - \tfrac{1}{2}\ \kappa_\alpha^2\ t)]\ , \qquad (16)
$$

en donde la suma se efectúa sobre los polos de la función $S(\kappa)$ cuyo argumento sea θ con la condición $-\frac{\pi}{4} < \theta < 0$, debido a que los demás polos dan una contribución despreciable y donde

$$
A'_\alpha = \int_0^\infty A_\alpha\ F(k)\ k^2\ dk
$$

Debido a que la variable k es real y la función $F(k)$ también lo es, la primera integral no da transitorios y es, por tanto, y como su misma forma indica, la forma estacionaria del proceso de dispersión; por lo que respecta al segundo término, la interpretación que su forma sugiere es que, durante la dispersión se forman unos estados quasi estacionarios, niveles de energía positiva $\kappa_{\alpha_x}^2 - \kappa_{\alpha_y}^2 > 0$ y que decaen con una vida media $\frac{1}{\kappa_{\alpha_x}\ \kappa_{\alpha_y}}$. Esta interpretación se basa en la analogía que existe entre el resultado del estudio de la penetración de una barrera y el resultado del caso de dispersión, pues además de aparecer una onda incidente superpuesta a una onda dispersa, que es el resultado estacionario que debía de esperarse, aparecen acusados unos niveles en el potencial que son los mismos por lo que penetra un paquete de ondas a través de una barrera, si el potencial se considera como un obstaculo a la salida del paquete; esto es, el problema se puede visualisar pensando que al incidir un paquete de ondas sobre un potencial dispersor, además de producir una onda dispersa estacionaria, exita unos estados quasi estacionarios propios de la estructura del potencial y que decaen con cierta vida media.

El autor agradece al Dr. Marcos Moshinsky su ayuda en el presente trabajo y a la Secretaría de Educación Pública su ayuda económica.

REFERENCIAS

1. J.M. Lozano, Rev.Mex.Fis. 2, 155 (1953).
2. F.M. Medina, Rev.Mex.Fis. 2, 268 (1953).
3. E.L. Ince, Ordinary Differencial Equations, p.72, Dover Publications.
4. Véase referencia 1 y también E.P.Wigner, Rev.Mex.Fis., 1, 91 (1952); N.G.Van Kampen, Rev.Mex.Fis., 2, 222 (1953).
5. I.N. Snedon, Fourier Transforms, p. 23, McGraw-Hill Book Co. Inc. (1951).
6. M.Moshinsky, Phys.Rev. 84, 525 (1951).
7. J.A.Stratton, Electromagnetic Theory, p. 406, McGraw-Hill Book Co., Inc. (1941).