

DISPERSION DE ELECTRONES POR MESONES

Juan de Oyarzabal

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México e

Instituto Nacional de la Investigación Científica

(Recibido: Marzo 30, 1954)

RESUMEN

Oni kalkulis la interagado je dua ordo inter la elektrona kaj mezona kampoj, kuŝlataj per elektromagneta kampo, konkludigante la diferencan kaj plenan sekciojn, kaj la angulan distribuon por la okazado de dispersio de pionojn per elektronoj, kaj reciproke.

La interacción entre un campo de Dirac y un campo mesónico no ocurre directamente sino por el intermedio del acoplamiento de ambos campos con un campo electromagnético. Nos

proponemos aquí estudiar esa interacción para aplicar los resultados al cálculo de las secciones para el proceso de la dispersión de piones por electrones.

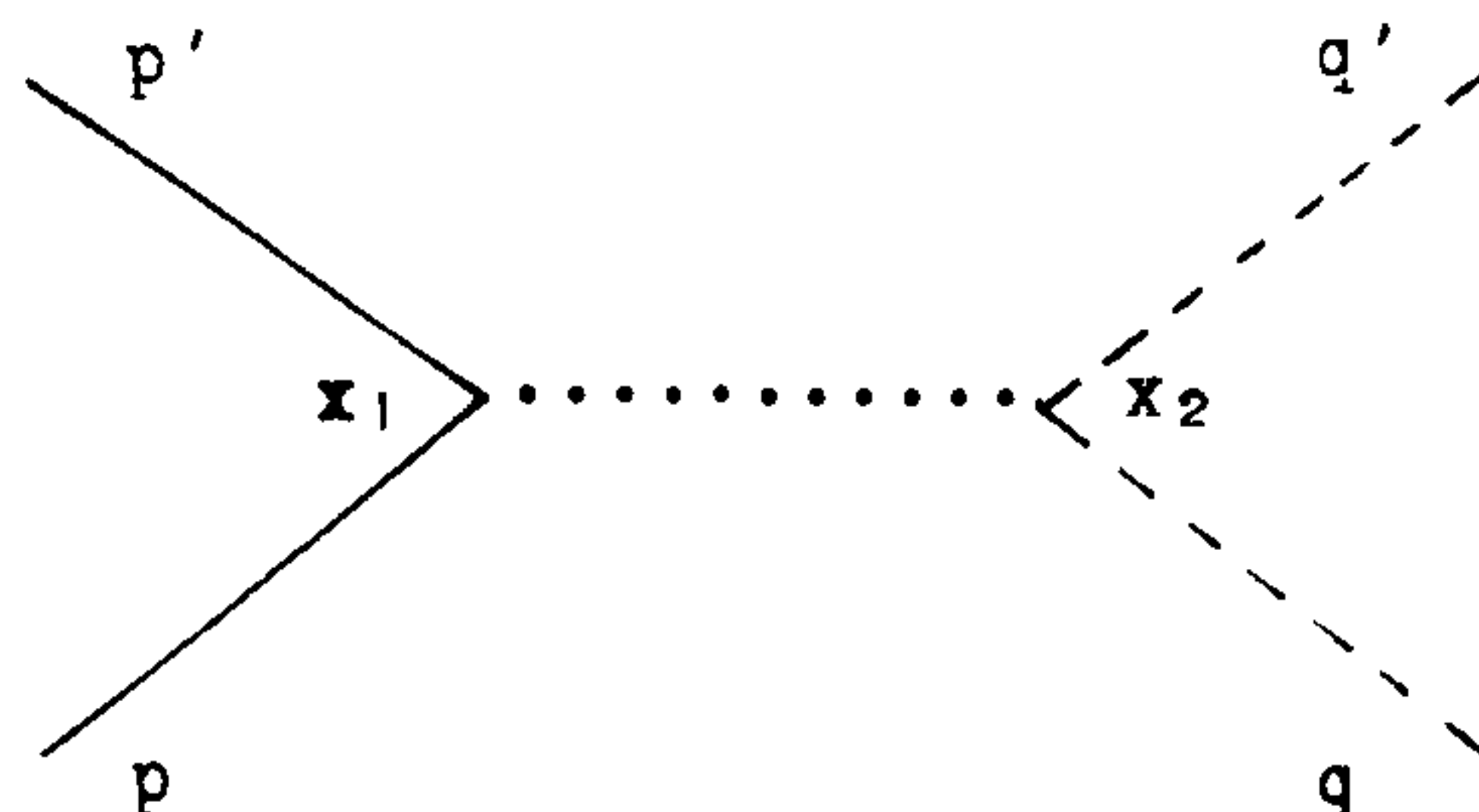
La densidad hamiltoniana de interacción entre los dichos campos es la suma de las de la interacción del campo de Dirac con el electromagnético y de la de éste con el mesónico, es decir:

$$H = H_{ef} + H_{mf} = -ie \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x) A_{\mu}(x) + \\ + ie \phi^{*}(x) (\vec{\partial}_{\mu} - \overleftarrow{\partial}_{\mu}) \phi(x) A_{\mu}(x) \quad (1)$$

donde $\bar{\psi}(x)$ y $\psi(x)$ son los operadores del campo de Dirac, $\phi(x)$ y $\phi^{*}(x)$ los del campo mesónico, y $A_{\mu}(x)$ el del electromagnético.

Se considera $\hbar = c = 1$ y el operador $\vec{\partial}_{\mu}$, $\overleftarrow{\partial}_{\mu}$ representa la derivación con respecto a x_{μ} de las variables del campo mesónico señaladas por el sentido de la flecha.

El proceso que queremos considerar está representado por la gráfica de Feynman:



cuyo operador asociado es

$$S = -e^2 \int dx_1 dx_2 \bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) D_F(x_1 - x_2) \cdot \phi^*(x_2) (\vec{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu) \phi(x_2) \quad (2)$$

en el espacio de configuración.

Substituyendo por los operadores que aparecen en (2) sus correspondientes desarrollos de Fourier, se obtiene para expresión de S en la representación momental:

$$S = -(2\pi)^4 e^2 \bar{\psi}(p') \frac{[\gamma(q+q')]}{\kappa^2} \psi(p) \phi^*(q') \phi(q) \quad (3)$$

donde p y p' representan los cuádrimomentos respectivos del electrón inicial y final, q y q' los correspondientes del mesón, y κ el del foton virtual intercambiado. La expresión (γq) se usa en lugar de $\gamma_\mu q_\mu$ para cualquier cuádrivector q_μ .

Por la conservación del cuádrimomento total:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(p') [\gamma(q+q')] \psi(p) &= \bar{\psi}(p') [\gamma(p-p'+2q)] \psi(p) = \\ &= 2\bar{\psi}(p') (\gamma q) \psi(p) \end{aligned} \quad (4)$$

toda vez que los operadores libres del campo de Dirac satisfacen las ecuaciones

$$(i\gamma p + m)\psi(p) = 0 \quad (5)$$

$$\bar{\psi}(p') (i\gamma p' + m) = 0$$

donde m es la masa del electrón.

Asímismo, las ecuaciones cuadráticas de los operadores de los electrones y mesones libres, son, respectivamente:

$$p^2 = p'^2 = -m^2$$

$$q^2 = q'^2 = -\mu^2$$
(6)

representando por μ a la masa del mesón.

Como consecuencia de todo esto, la ecuación (3) se transforma en:

$$S = \frac{(2\pi)^4 e^2}{(p-p')^2} \bar{\psi}(p') (\gamma q) \psi(p) \phi^*(q') \phi(q)$$
(7)

que nos dá el valor del operador de la matriz S .

Para calcular el elemento de matriz de este operador entre los estados inicial y final del proceso, hagamos las substituciones:

$$\psi(p) = \frac{S_p^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{3/2}} u(p, s) A(p, s)$$
(8)

$$\phi(q) = \frac{S_q^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{3/2} q_0^{1/2}} [a(q) + b^*(q)]$$

con expresiones semejantes para $\bar{\psi}(p')$ y $\phi^*(q')$. En todas ellas s_p y s_q representan las densidades de estados electrónico y mesónicos y $A(p, s)$, $a(q)$, $b^*(a')$ los correspon-

dientes operadores de aniquilación y de creación.

De esta manera, se obtiene que el cuadrado del elemento de matriz buscado, es decir, la probabilidad de que ocurra un proceso por unidad de banda de cuádrimomentos es:

$$|H|^2 = \frac{(2\pi e^2)^2}{q_0 q'_0} (p-p')^{-4} \sum_{s s'} |\bar{u}(p', s') (\gamma q) u(p, s)|^2 \quad (9)$$

La operación $\sum_{s s'}$, que representa la suma sobre el spin final y el promedio sobre el spin inicial de los electrones, vale:

$$\begin{aligned} \sum_{s s'} |\bar{u}(p', s') (\gamma q) u(p, s)|^2 &= \\ &= \frac{1}{8p_0 p'_0} \text{Tr} [(i\gamma p - m) (\bar{\gamma} q) (i\gamma p' - m) (\gamma q)] \end{aligned} \quad (10)$$

donde:

$$(\bar{\gamma} q) = \gamma_4 (\gamma q) \gamma_4 \quad (11)$$

Calculando la traza por los métodos habituales, se encuentra para la probabilidad el valor:

$$\begin{aligned} |H|^2 &= \frac{(2\pi e^2)^4 (p-p')^{-4}}{p_0 p'_0 q_0 q'_0} \{ (pq) (p'q) + \\ &+ [(pq) p'_0 + (p'q) p_0] q_0 + \\ &+ [(pp') + m^2] [\mu^2/2 - q_0^2] \} \end{aligned} \quad (12)$$

Esta expresión se simplifica considerablemente, transformándola al sistema de laboratorio en el cual consideramos al electrón en reposo. En este sistema, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \underline{p} &= (\underline{Q}, m) & p_0 &= m \\
 \underline{p}' &= (\underline{p}', W) & p'_0 &= W = m + E - E' \\
 \underline{q} &= (\underline{q}, E) & q_0 &= E = \sqrt{\underline{q}^2 + \mu^2} \\
 \underline{q}' &= (\underline{q}', E') & q'_0 &= E' = \sqrt{\underline{q}'^2 + \mu^2}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Entonces, para las cantidades que intervienen en (12) resulta, teniendo en cuenta también las ecuaciones (6):

$$\begin{aligned}
 (pq) &= -mE & (p'q) &= -mE' & (pp') &= -mW \\
 (p-p') &= 2m(E-E')
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Substituyendo (13) y (14) en (12) obtenemos:

$$|H|^2 = \frac{(2\pi e^2)^2}{WEE'} \cdot 2 \left[\frac{\mu^2}{E-E'} + \frac{2mE^2}{(E-E')^2} \right]
 \tag{15}$$

La sección diferencial es:

$$d\sigma = \frac{2\pi\rho_F}{I_{inc}} |H|
 \tag{16}$$

Para integrar esta expresión es conveniente dejar como

variable a la energía E' final del electrón. Para ello¹, expresamos la densidad de estados finales ρ_E en términos exclusivamente de dicha energía final E' , obteniéndose

$$\rho_E = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \frac{W}{\underline{q}} E' dE' d\varphi \quad (17)$$

y por lo tanto, la sección diferencial queda en la forma:

$$d\sigma = \frac{2e^4}{E^2 - m^2} \left[\frac{\mu^2}{E - E'} + \frac{2mE^2}{(E - E')^2} \right] dE' d\varphi \quad (18)$$

y efectuada la integración sobre el ángulo azimutal φ resulta para la sección total:

$$\sigma = \frac{4\pi e^4}{E^2 - m^2} \left[\mu^2 \int \frac{dE'}{E - E'} + 2mE^2 \int \frac{dE'}{(E - E')^2} \right] \quad (19)$$

Los límites de la integración sobre E' se calculan expresando a E' como función de $\cos\theta$

$$E' = \frac{(m^2 + \mu E)(\mu + E) + (E^2 - m^2) \cos\theta \sqrt{\mu^2 - m^2 \sin^2\theta}}{(\mu + E)^2 - (E^2 - m^2) \cos^2\theta} \quad (20)$$

resultando entonces para dichos límites:

$$E'_{\max} = E'(\theta = 0) = E$$

$$E'_{\min} = E'(\theta = 180) = \frac{(\mu^2 + m^2) E + 2m^2 \mu}{m^2 + \mu^2 + 2\mu E} \quad (21)$$

Para obtener la distribución angular, derivamos la ecuación (20) con respecto a $\cos \theta$, y substituyendo en la (18) resulta:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2e^4}{E^2 - m^2} \left[\frac{\mu^2}{E - E'} + \frac{2mE^2}{(E - E')^2} \right] f(\theta) \quad (22)$$

donde E' está dado por (20) y:

$$f(\theta) = \frac{(m^2 + \mu E) \cos \theta + (E + \mu) \sqrt{\mu^2 - m^2 \sin^2 \theta}}{\sqrt{\mu^2 - m^2 \sin^2 \theta} [(\mu + E)^2 - (E^2 - m^2) \cos^2 \theta]^2} \quad (23)$$

Si quisésemos obtener las secciones para el proceso de dispersión de electrones por piones, nos bastaría en la ecuación (12) considerar que es el electrón y no el mesón el que se encuentra en reposo, obteniéndose entonces para la sección diferencial

$$d\sigma = \frac{2n}{m} \frac{e^4}{E^2 - m^2} \left[\frac{\mu + 2E}{E - E'} + \frac{2(\mu^2 - E^2)}{(E - E')^2} \right] \quad (24)$$

donde E y E' son ahora las energías inicial y final del electrón.

Continuaremos la exposición de este estudio -para cuya realización nos han sido muy valiosas las sugerencias del Prof. Alejandro Medina- con otro que publicaremos próximamente y en el que consideraremos las correcciones radiativas a este proceso.

REFERENCIAS

1. J. Ashin, A. Simon y R. E. Marshak. Prog. Th. Phys. 5, (1950), 634