CAMPO GRAVITACIONAL DE BIRKHOFF DE UN PUNTO MASA EN MOVIMIENTO ARBITRARIO EN LA TEORIA DE BIRKHOFF.

Carlos Graef Fernández.

Instituto de Física de la Universidad Nacional de México

(Recibido: Diciembre 15, 1951)

RESUMEN.

En este artículo se obtiene el campo gravitacional de Birkhoff generado por un punto masa en movimiento arbitrario. En el espacio-tiempo de Minkowski este campo es un tensor doblemente covariante proporcional a la masa que lo genera. Es también proporcional a una combinación lineal del tensor métrico fundamental y del tensor cuadrático en las componentes covariantes del cuadrivector velocidad retardada. Es además inversamente proporcional a la distancia del acontecimiento en que se calcula al soporte del cuadrivector velocidad retardada del punto masa con respecto a ese acontecimiento. El campo satisface la ecuación fundamental de Birkhoff ya que su D'Alembertiano es nulo, y se reduce al campo central cuando la velocidad es nula.

1. El Marco de Referencia de la Teoría.

Birkhoff[1] utiliza en su teoría de la gravitación el espacio-tiempo llano de Minkowski que es también el marco de referencia de la teoría de la relatividad especial de Einstein. El cuadrado del elemento de arco de ese espacio-tiempo es:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \ . \qquad (1)$$

Aquí t significa el tiempo medido en segundos; las literales x, y, z son las coordenadas cartesianas del lugar en que ocurrió el acontecimiento, medidas en segundos-luz. Con estas unidades la velocidad de la luz es igual a uno. El marco de referencia t, z, y, z es un marco de referencia inercial.

En muchas ocasiones es conveniente utilizar la notación tensorial para expresar el cuadrado del elemento de arco. En esta notación se escribe:

$$x^1 = t \ ; \qquad x^2 = x \ ; \qquad x^3 = y \ ; \qquad x^4 = z \ . \qquad (2)$$

El tensor métrico fundamental[2] se designa con Δ_{ij}, sus componentes son:

$$\begin{aligned} &\Delta_{11} = 1, \Delta_{22} = \Delta_{33} = \Delta_{44} = -1 \ ; \\ &\Delta_{ij} = 0 \qquad \text{cuando} \quad i \neq j \ . \end{aligned} \qquad (3)$$

El cuadrado del elemento de arco se expresa con esta notación como sigue:

$$ds^2 = \Delta_{ij} \, dx^i \, dx^j \ . \qquad (4)$$

En este trabajo los índices latinos pueden adquirir los valores 1,2,3,4. Siguiendo a Einstein utilizamos la convención, de que una expresión con un índice latino repetido significa la suma de los cuatro valores que adquiere esa expresión al recorrer el índice la lista 1,2,3,4.

2. Las Transformaciones de la Teoría.

Las transformaciones que dejan invariante la forma del cuadrado del elemento de arco (4) forman el grupo general de Lorentz. Estas transformaciones son del tipo:

$$\bar{x}^i = a^i_j x^j + b^i \quad . \tag{5}$$

Aquí las a^i_j y las b^i son constantes. Las b^i son enteramente arbitrarias, pero las a^i_j satisfacen las ecuaciones de condición:

$$\Delta_{ij}\, a^i_m\, a^j_n = \Delta_{mn} \quad . \tag{6}$$

En una transformación (5) en que las a^i_j satisfacen las ecuaciones de condición (6), el cuadrado del elemento de arco (4) se transforma en

$$ds^2 = \Delta_{ij}\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^j \; .$$

El grupo genéral de Lorentz tiene un subgrupo que se utiliza de preferencia en la relatividad especial. Las transformaciones de este subgrupo son de la forma:

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \frac{x^1 - v x^2}{\sqrt{1-v^2}} \; , \quad \bar{x}^2 = \frac{x^2 - v x^1}{\sqrt{1-v^2}} \; , \\ \bar{x}^3 &= x^3 \quad , \quad \bar{x}^4 = x^4 \end{aligned} \tag{7}$$

Aquí $|v| < 1$. La transformación (7) tiene un significado físico muy simple: el sistema $\bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4$ se mueve con respecto al sistema x^2, x^3, x^4 con la velocidad constante v; los dos sistemas coinciden en el instante $x^1 = \bar{x}^1 = 0$; el eje de las $\bar{x}^2$ se desliza a lo largo del eje de las x^2; el eje $\bar{x}^3$ permanece paralelo al eje x^3; el eje $\bar{x}^4$ permanece paralelo al eje x^4. Designaremos con $L(v)$ a la transformación definida por (7), que como se ve está completamente caracterizada por la velocidad v.

Otro subgrupo del grupo general de Lorentz es el de las rotaciones rígidas. En las transformaciones de este subgrupo $\bar{x}^1 = x^1$, y el sistema cartesiano $\bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4$ se obtiene del sistema x^2, x^3, x^4

por medio de una rotación rígida. Aquí, los dos sistemas cartesianos tienen distinta orientación, y están en reposo uno con respecto al otro. Llamaremos R a una rotación rígida.

Consideraremos ahora una subfamilia del grupo general de Lorentz. Los miembros de la subfamilia se definen como sigue:

$$R^{-1}\ L(v)\ \ R\ . \tag{8}$$

Aquí R^{-1} es la recíproca de la rotación R, y $L(v)$ es la transformación (7). En una transformación del tipo (8) el sistema $\bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4$ se está moviendo en el sistema x^2, x^3, x^4 con una velocidad constante; esta velocidad se caracteriza por medio del vector $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$. La transformación (8) queda completamente definida por los tres parámetros v^x, v^y, v^z. Los orígenes de los sistemas x^2, x^3, x^4 y $\bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4$ coinciden en el instante $x^1 = \bar{x}^1 = 0$.

Para escribir explícitamente las ecuaciones de la transformación (8) es útil hacer las siguientes convenciones:

1) Un índice griego adquiere los valores 2, 3, 4.
2) El símbolo v^α significa v^x para $\alpha = 2$; el símbolo v^α significa v^y para $\alpha = 3$; el símbolo v^α significa v^z para $\alpha = 4$.
3) Una expresión en la que aparece un índice griego repetido significa la suma de los tres valores que adquiere esa expresión al recorrer el índice la lista 2, 3, 4.

Con estas convenciones se obtienen para las ecuaciones[3] de la transformación (8).

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\, x^1 - \frac{v^\beta\, x^\beta}{\sqrt{1-v^2}} \\ \bar{x}^\alpha &= -\frac{v^\alpha}{\sqrt{1-v^2}}\, x^1 + \left[\delta^\alpha_\beta + \frac{v^\alpha\, v^\beta\, \left(1-\sqrt{1-v^2}\right)}{\sqrt{1-v^2}}\right] x^\beta \end{aligned} \tag{9}$$

Aquí $v^2 = (v^x)^2 + (v^y)^2 + (v^z)^2$; δ^α_β es la delta de Kronecker.

Si se escribe:

$$q = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (10)$$

se obtiene para la matriz de la transformación (9):

$$\|a^i_j\| = \left\| \begin{matrix} q & -qv^x & -qv^y & -qv^z \\ -qv^x & 1+\frac{q-1}{v^2}v^xv^x & \frac{q-1}{v^2}v^xv^y & \frac{q-1}{v^2}v^xv^z \\ -qv^y & \frac{q-1}{v^2}v^xv^y & 1+\frac{q-1}{v^2}v^yv^y & \frac{q-1}{v^2}v^yv^z \\ -qv^z & \frac{q-1}{v^2}v^xv^z & \frac{q-1}{v^2}v^yv^z & 1+\frac{q-1}{v^2}v^zv^z \end{matrix} \right\| \qquad (11)$$

3. Campo Gravitacional de un Punto Masa en Movimiento Uniforme.

En la nueva formulación de la teoría de la gravitación de Birkhoff, debida a A. Barajas y al autor, se postula el campo gravitacional de un punto masa en reposo en el origen de coordenadas de un sistema inercial. Sea r la distancia del punto x, y, z del espacio físico, al punto de masa M colocado en el origen.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2} \quad . \qquad (12)$$

El tensor gravitacional de Birkhoff[4] que describe el campo de ese punto masa es:

$$\|h_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} \frac{M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{M}{r} \end{matrix} \right\| \qquad (13)$$

Usando la delta de Kronecker, (13) se puede escribir como:

$$h_{ij} = \frac{M}{r}\delta_{ij} \tag{14}$$

El tensor del campo gravitacional debido a un punto masa que se mueve con un vector velocidad constante $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$ y que pasa por el origen en el instante $x^1=0$, se calcula aplicándole a (14) la transformación inversa de (9) cuya matriz se obtiene de (11) cambiándoles de signo a las componentes de la velocidad.

El tensor del campo gravitacional de un punto masa tal, tiene por expresión:

$$\|h_{ij}\| = \frac{M}{r}\begin{Vmatrix} \frac{1+v^2}{1-v^2} & -\frac{2\,v^x}{1-v^2} & -\frac{2\,v^y}{1-v^2} & -\frac{2\,v^z}{1-v^2} \\ -\frac{2v^x}{1-v^2} & 1+\frac{2v^xv^x}{1-v^2} & \frac{v^xv^y}{1-v^2} & \frac{v^xv^z}{1-v^2} \\ -\frac{2v^y}{1-v^2} & \frac{v^xv^y}{1-v^2} & 1+\frac{2v^yv^y}{1-v^2} & \frac{v^yv^z}{1-v^2} \\ -\frac{2v^z}{1-v^2} & \frac{v^xv^z}{1-v^2} & \frac{v^yv^z}{1-v^2} & 1+\frac{2v^zv^z}{1-v^2} \end{Vmatrix} \tag{15}$$

Conviene introducir las cuatro componentes v^1, v^2, v^3, v^4 del cuadrivector velocidad de Minkowski, que se definen como sigue:

$$v^1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v^2 = \frac{v^x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v^3 = \frac{v^y}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v^4 = \frac{v^z}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{16}$$

Nota: El símbolo v^2 significa algunas veces el cuadrado de la velocidad y otras la segunda componente del cuadrivector velocidad de Minkowski; es fácil distinguir entre los dos significados.

Las componentes covariantes del cuadrivector velocidad de Minkowski se obtienen de las componentes contravariantes siguiendo el procedimiento de bajar un índice:

$$v_i = \Delta_{ij}\, v^j \quad . \tag{17}$$

La ecuación (17) se descompone en las cuatro siguientes:

$$v_1 = v^1 , \quad v_2 = -v^2 , \quad v_3 = -v^3 , \quad v_4 = -v^4 . \tag{18}$$

El campo gravitacional de un punto masa en movimiento uniforme se puede expresar de un modo muy sencillo en términos de las componentes covariantes del cuadrivector velocidad de Minkowski:

$$h_{ij} = \frac{M}{r}\,(2v_i v_j - \Delta_{ij}) . \tag{19}$$

En la fórmula (19) r significa la distancia entre el punto masa M y el punto del espacio físico en el que que se calculan las componentes del tensor del campo; esta distancia r está medida en el marco de referencia inercial en el que el punto masa M está en reposo. Conviene expresar todas las cantidades que intervienen en (19) en el marco de referencia inercial en el que están medidas las h_{ij} del primer miembro; esto, es en el marco inercial en que el punto masa M se mueve con el vector velocidad $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$. Sean ahora (x, y, z) las coordenadas del punto del espacio en el que se calculan las componentes del campo h_{ij} en el instante t; el tiempo t y las coordenadas x, y, z pertenecen al marco de referencia inercial en el que M se mueve con el vector velocidad $\vec{v}$. Aplicando la transformación inversa de la (9) a las coordenadas espaciales y al tiempo, se obtiene que la r de la fórmula (19):

$$r = \frac{\sqrt{(t - xv^x - yv^y - zv^z)^2 + (1-v^2)(x^2+y^2+z^2-t^2)}}{\sqrt{1-v^2}} \quad . \tag{20}$$

Combinando (19) con (20) se obtiene:

$$h_{ij} = \frac{M\sqrt{1-v^2}\,[2\,v_i v_j - \Delta_{ij}]}{\sqrt{(t-xv^x-yv^y-zv^z)^2 + (1-v^2)(x^2+y^2+z^2-t^2)}} \qquad (21)$$

La fórmula (21) expresa el tensor potencial gravitacional en el instante t, en el punto x, y, z debido a un punto masa M que pasa por el origen en el instante $t = 0$, y que se mueve con el vector velocidad constante $\vec{v} = v^x, v^y, v^z$.

4. Potenciales Gravitacionales Retardados.

El tensor potencial gravitacional (21) se puede escribir en una forma más adecuada para los desarrollos ulteriores, si se utilizan algunas relaciones de la teoría de los potenciales retardados[5] que se deducen a continuación. Supóngase una fuente puntual F que emite un efecto físico que se transmite con la velocidad de la luz; en el sistema de unidades que usamos, esta velocidad es igual a uno. Sean $\xi^2 = \xi$, $\xi^3 = \eta$ y $\xi^4 = \zeta$ las coordenadas de la fuente F. Si la fuente F está en movimiento en el marco de referencia inercial que estamos usando, entonces sus coordenadas son funciones del tiempo:

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha\,(t)\ ; \qquad \xi = \xi\,(t)\ , \qquad \eta = \eta\,(t)\ , \qquad \zeta = \zeta\,(t)\ . \qquad (22)$$

Considérese ahora el punto $P(x, y, z)$ del espacio físico del marco de referencia inercial. Sean $\underline{\xi}^2 = \underline{\xi}$, $\underline{\xi}^3 = \underline{\eta}$, $\underline{\xi}^4 = \underline{\zeta}$ las coordenadas de la posición de la fuente F en el instante $\underline{\xi}^1 = \underline{t}$, en el que salió el efecto físico que llega a P en el instante t. A $\underline{\xi}_1 = \underline{t}$ se le llama tiempo retardado de la fuente F con respecto al punto P en el instante t; a las coordenadas $\underline{\xi}^2 = \underline{\xi}$, $\underline{\xi}^3 = \underline{\eta}$, $\underline{\xi}^4 = \underline{\zeta}$, se les llama coordenadas retardadas de F con respecto al punto P en el instante t.

Consideremos ahora una fuente F que se mueve en el marco de referencia inercial con el vector velocidad constante $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$ Supongamos que F pasa por el origen del sistema de coordenadas en el instante $t = 0$. Las ecuaciones del movimiento de F son entonces:

$$\xi^2 = \xi = v^x t \ , \qquad \xi^3 = \eta = v^y t \ , \qquad \xi^4 = \zeta = v^z t \ . \tag{23}$$

Para la posición retardada de F con respecto a P en el instante t se tiene:

$$\underline{\xi} = v^x \underline{t} \ , \quad \underline{\eta} = v^y \underline{t} \ , \quad \underline{\zeta} = v^z \underline{t} \ . \tag{24}$$

La distancia entre la posición retardada de F y P se llama distancia retardada, y se designa con $\underline{r}$.

$$\underline{r} = \sqrt{(x-\underline{\xi})^2 + (y-\underline{\eta})^2 + (z-\underline{\zeta})^2} \ . \tag{25}$$

Como el efecto emitido por F se propaga con la velocidad uno, el tiempo $t - \underline{t}$ que ese efecto tarda en llegar de F a P es igual a la distancia retardada $\underline{r}$.

$$t - \underline{t} = \underline{r} \ . \tag{26}$$

De (24), (25) y (26) se obtiene:

$$t - \underline{t} = \sqrt{(x-v^x\underline{t})^2 + (y-v^y\underline{t})^2 + (z-v^z\underline{t})^2} \ . \tag{27}$$

Despejando $\underline{t}$ de la ecuación (27), teniendo en cuenta que $\underline{t} < t$, se obtiene:

$$\underline{t} = \frac{(t-xv^x-yv^y-zv^z) - \sqrt{(t-xv^x-yv^y-zv^z)^2 + (1-v^2)(x^2+y^2+z^2-t^2)}}{1-v^2} \ . \tag{28}$$

De (26) y (28) se obtiene para la distancia retardada $\underline{r}$:

$$\underline{r} = \frac{(xv^x+yv^y+zv^z-v^2t) + \sqrt{(t-xv^x-yv^y-zv^z)^2 + (1-v^2)(x^2y^2+z^2-t^2)}}{1-v^2} \ . \tag{29}$$

Considérese el vector $\vec{\underline{r}}$ que tiene por origen a la fuente F en su posición retardada, y por extremo al punto P.

$$\vec{\underline{r}} = (x-v^x\underline{t},\ y-v^y\underline{t},\ z-v^z\underline{t}) \quad . \tag{30}$$

Fórmese el producto escalar del vector $\vec{\underline{r}}$ y del vector constante $\vec{v}$; se obtiene:

$$\vec{\underline{r}}\cdot\vec{v} = xv^x + yv^y + zv^z - v^2\underline{t} \quad . \tag{31}$$

Substituyendo (28) en (31) resulta:

$$\vec{\underline{r}}\cdot v = \frac{-v^2t+(xv^x+yv^y+zv^z) + v^2\sqrt{(t-xv^x-yv^y-zv^z)^2 + (1-v^2)(x^2+y^2+z^2-t^2)}}{1-v^2} \ . \tag{32}$$

Calculemos ahora la expresión:

$$\underline{r} - \vec{\underline{r}}\cdot\vec{v} = \sqrt{(t-xv^x-yv^y-zv^z)^2 + (1-v^2)(x^2+y^2+z^2-t^2)} \quad . \tag{33}$$

La fórmula (33) se dedujo para una fuente F que emite un efecto físico que se propaga con la velocidad de la luz; F se mueve con un vector velocidad constante $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)$, y pasa por el origen del sistema de coordenadas del marco de referencia inercial en el instante $t = 0$. Como en la teoría de la gravitación de Birkhoff se supone que los efectos gravitacionales se propagan con la velocidad de la luz, el punto masa de la fórmula (21) está en las condiciones de la fuente F. Aplicando (33) a la fórmula (21), se obtiene:

$$h_{ij} = \frac{M\sqrt{1-v^2}\,[2v_iv_j - \Delta_{ij}]}{\underline{r} - \vec{\underline{r}}\cdot\vec{v}} \tag{34}$$

El tensor gravitacional h_{ij} de la fórmula (34) está calculado en el instante t en el punto (x,y,z); se debe a un punto masa M que se mueve con el vector velocidad constante $\vec{v} = v^x, v^y, v^z$; la distancia $\underline{r}$ es la distancia retardada del punto masa, al punto P; el vector $\vec{\underline{r}}$ es el que tiene por origen la posición retardada del punto masa, y por extremo el punto P; v_1, v_2, v_3, v_4 son las componentes covariantes del cuadrivector de Minkowski; se obtienen de las componentes del vector $\vec{v}$ como sigue:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v_2 = -\frac{v^x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v_3 = -\frac{v^y}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v_4 = -\frac{v^z}{\sqrt{1-v^2}}.$$

De este examen se ve que la fórmula (34) es independiente de que el punto masa pase o no por el origen.

Como (34) se dedujo para un punto masa en movimiento uniforme, v es constante y $v^x, v^y, v^z, v_1, v_2, v_3, v_4$ son constantes. Si se designa con $\vec{\underline{v}}$ al vector velocidad retardado del punto masa, o sea el vector velocidad de este punto para el tiempo retardado $\underline{t}$, se obtiene:

$$\vec{\underline{v}} = \vec{v}\ ; \quad \underline{v}^x = v^x, \quad \underline{v}^y = v^y, \quad \underline{v}^z = v^z\ ;$$

$$\underline{v}_1 = v_1, \quad \underline{v}_2 = v_2, \quad \underline{v}_3 = v_3, \quad \underline{v}_4 = v_4\ ;$$

$$\underline{v} = v\ .$$

La fórmula (34) puede escribirse entonces como:

$$h_{ij} = \frac{M\sqrt{1-\underline{v}^2}\,[2\underline{v}_i\underline{v}_j - \Delta_{ij}]}{\underline{r} - \vec{\underline{r}}\cdot\vec{\underline{v}}}\ . \tag{35}$$

La fórmula (35) es susceptible de generalización[6]. No intervienen en ella sino el vector velocidad $\vec{\underline{v}}$ retardado del punto masa, y el vector $\vec{\underline{r}}$ que une la posición retardada del punto masa, con el punto P en el que se calcula h_{ij}. Con las seis componentes de esos dos vectores y la masa M se obtienen las 16 componentes de h_{ij}. Todas las cantidades que se refieren al punto masa aparecen retardadas.

5. Campo Gravitacional de un Punto Masa en Movimiento Arbitrario

Conviene introducir el concepto de "campo gravitacional instantáneo" generado por el punto masa M al pasar por el punto F $(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\zeta})$ del espacio físico en el instante τ. Consideremos un punto P (x,y,z) del espacio físico. El efecto gravitacional gestado por M al pasar por F llega a P en el instante t:

$$t = \tau + \sqrt{(x-\underline{\xi})^2 + (y-\underline{\eta})^2 + (z-\underline{\zeta})^2} \quad . \tag{36}$$

Si M se está moviendo con el vector velocidad constante $(\underline{v}^x, \underline{v}^y, \underline{v}^z)$ al pasar por F, entonces el campo gravitacional h_{ij} calculado en P (x,y,z) en el instante t (36), está dado por la fórmula (35). Definimos como "campo gravitacional instantáneo" generado por el punto masa M al pasar por F $(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{\zeta})$ en el instante τ, al que se calcula según (35).

Si se generaliza la fórmula (35) al caso del campo de un punto masa en movimiento arbitrario, se está asentando el siguiente postulado:

Postulado. El campo gravitacional instantáneo generado por un punto masa es independiente de su aceleración.

El campo gravitacional para todos los tiempos, de un punto masa en movimiento arbitrario, es el conjunto de los campos gravitacionales instantáneos generados por ese punto masa en todas sus posiciones. El campo está dado por la fórmula (35)

Esta expresión del campo es compatible con la ecuación fundamental de la teoría de Birkhoff[7] para el campo gravitacional en el espacio vacío, que es

$$\Box\, h_{ij} = 0 \quad . \tag{37}$$

Aquí "$\Box$" es el operador de D'Alembert.

En la teoría de los potenciales retardadas se establece el he cho notable que la función:

$$\frac{f(\underline{t})}{\underline{r} - \vec{\underline{r}} \cdot \vec{\underline{v}}} \tag{38}$$

satisface la ecuación

$$\Box \frac{f(\underline{t})}{\underline{r} - \vec{\underline{r}} \cdot \vec{\underline{v}}} = 0 \quad . \tag{39}$$

Aquí $\underline{t}$ es el tiempo retardado del punto masa con respecto a P (x,y,z) y al instante t. La función f es una función que tiene primera y segunda derivada continuas. Se ve claramente que las componentes de h_{ij} en (35) son del tipo (39).

La fórmula (35) admite una simplificación considerable. Recordando que $\underline{r} = t - \underline{t}$ según (26), y recordando que las componentes del vector $\vec{\underline{r}}$ son $(x-\underline{\xi},\ y-\underline{\eta},\ z-\underline{\zeta})$, se obtiene:

$$h_{ij} = \frac{M\sqrt{1-\underline{v}^2}\,[2\underline{v}_i\ \underline{v}_j - \Delta_{ij}]}{(t-\underline{t})-(x-\underline{\xi})\,\underline{v}^x-(y-\underline{\eta})\,\underline{v}^y-(z-\underline{\zeta})\,\underline{v}^z} \quad . \tag{40}$$

Introduciendo el lenguaje de cuadrivectores, se puede escribir:

$$\begin{gathered} t-\underline{t} = x^1-\underline{\xi}^1 \quad , \quad x-\underline{\xi} = x^2-\underline{\xi}^2 \quad , \quad y-\underline{\eta} = x^3-\underline{\xi}^3 \quad , \\ z-\underline{\zeta} = x^4-\underline{\xi}^4 \quad ; \\ \underline{v}^1 = \frac{1}{\sqrt{1-\underline{v}^2}} \quad , \quad \underline{v}^2 = \frac{\underline{v}^x}{\sqrt{1-\underline{v}^2}} \quad , \quad \underline{v}^3 = \frac{\underline{v}^y}{\sqrt{1-\underline{v}^2}} \quad , \\ \underline{v} = \frac{\underline{v}^z}{\sqrt{1-\underline{v}^2}} \quad . \end{gathered} \tag{41}$$

La expresión (40) se convierte en:

$$h_{ij} = \frac{M\,[2\underline{v}_i\,\underline{v}_j - \Delta_{ij}]}{\Delta_{mn}\,(x^m - \underline{\xi}^m)\,\underline{v}^n} \tag{42}$$

El denominador de (42) tiene una interpretación geométrica sencilla en el espacio-tiempo. Las cuatro coordenadas (x^1, x^2, x^3, x^4) se refieren al acontecimiento A en el que se calcula el tensor h_{ij}. Las cuatro coordenadas $(\underline{\xi}^1, \underline{\xi}^2, \underline{\xi}^3, \underline{\xi}^4)$ son del acontecimiento retardado en la línea de universo del punto masa, con respecto a A. Las diferencias

$$(x^1 - \underline{\xi}^1\ ,\quad x^2 - \underline{\xi}^2\ ,\quad x^3 - \underline{\xi}^3\ ,\quad x^4 - \underline{\xi}^4)$$

son las componentes del cuadrivector que une el acontedimiento retardado del punto masa con el acontecimiento A. Como el cuadrivector velocidad es unitario en el espacio tiempo, la expresión

$$\Delta_{mn}\,(x^m - \underline{\xi}^m)\,\underline{v}^n \tag{43}$$

es la proyección del cuadrivector $(x^m - \underline{\xi}^m)$ sobre el cuadrivector velocidad.

Consideremos un acontecimiento $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Ese acontecimiento está compuesto del instante x^1 y del punto (x^2, x^3, x^4) del espacio físico. Hay para ese punto (x^2, x^3, x^4) y para ese instante x^1 un tiempo retardado $\underline{\xi}^1$, y una posición retardada $(\underline{\xi}^2, \underline{\xi}^3, \underline{\xi}^4)$ del punto masa. Estas cuatro coordenadas $(\underline{\xi}^1, \underline{\xi}^2, \underline{\xi}^3, \underline{\xi}^4)$ definen el acontecimiento retardado $\underline{a}$ en la línea de universo del punto masa, con respecto al acontecimiento A. Las componentes del cuadrivector $\underline{a}A$ son:

$$\underline{a}A = (x^1 - \underline{\xi}^1,\ x^2 - \underline{\xi}^2,\ x^3 - \underline{\xi}^3,\ x^4 - \underline{\xi}^4)\ . \tag{44}$$

Las componentes del cuadrivector velocidad retardada de Minkowski del punto masa en $\underline{a}$, son:

$$\underline{v}^i = (\underline{v}^1, \underline{v}^2, \underline{v}^3, \underline{v}^4) \tag{45}$$

El denominador de (42) es la proyección del cuadrivector $\underline{\alpha}A$ sobre el cuadrivector velocidad retardada de Minkowski.

Tracemos por $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$ un hiperplano perpendicular al cuadrivector velocidad retardada de Minkowski $(\underline{v}^1, \underline{v}^2, \underline{v}^3, \underline{v}^4)$ que es unitario. La ecuación de este hiperplano es:

$$\Delta_{mn} (X^m - x^m)\, \underline{v}^n = 0 \,. \tag{46}$$

Aquí X^m son las coordenadas corrientes del hiperplano. Consideremos ahora la recta soporte del cuadrivector velocidad retardada de Minkowski. Su ecuación paramétrica es:

$$x^i = \underline{\xi}^i + \lambda\, \underline{v}^i \,. \tag{47}$$

Aquí λ es un parámetro, y x^i son las coordenadas corrientes en la recta. La recta (47) corta al hiperplano (46) en un punto para el que el parámetro λ vale

$$\lambda = \Delta_{mn} (x^m - \underline{\xi}^m)\, \underline{v}^n \,. \tag{48}$$

Las coordenadas del punto de intersección se obtienen substituyendo λ de (48) en (47).

Calcúlese ahora la distancia del punto de intersección al acontecimiento $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$. El cuadrado de esta distancia es:

$$\Delta_{ij} (X^i - x^i)(X^j - x^j) = \Delta_{ij} (\underline{\xi}^i - x^i)(\underline{\xi}^j - x^j) + 2\lambda\, \Delta_{ij}(\underline{\xi}^i - x^i)\underline{v}^j + \lambda^2 . \tag{49}$$

La línea que une los acontecimientos $\underline{\alpha}$ y A es la línea de universo de un rayo de luz. Por lo tanto tenemos:

$$\Delta_{ij} (\underline{\xi}^i - x^i)(\underline{\xi}^j - x^j) = 0 \,. \tag{50}$$

En vista de (50) y de (48) se obtiene de (49):

$$\Delta_{ij}\,(X^i - x^i)(X^j - x^j) = -\lambda^2\ . \tag{51}$$

Si llamamos p a la distancia del acontecimiento A al soporte del cuadrivector de la velocidad retardada de Minkowski, obtenemos:

$$p^2 = -\,[\Delta_{mn}\,(x^m - \underline{\xi}^m)\ \underline{v}^n]^2\ . \tag{52}$$

El signo menos del segundo miembro de (52) indica que p es una distancia espacialoide. Obtenemos como resultado: que el denominador del tensor gravitacional (42) es un valor absoluto igual a la distancia del acontecimiento en el que se calcula ese tensor al soporte del cuadrivector velocidad retardada de Minkowski del punto masa. De (42) y (52) se obtiene:

$$h_{ij} = \frac{M\ [2\underline{v}_i\ \underline{v}_j - \Delta_{ij}]}{|p|}\ . \tag{53}$$

La fórmula (53) expresa el tensor gravitacional de Bikrhoff debido a un punto masa en movimiento arbitrario en forma extraordinariamente compacta.

Conviene interpretar la expresión (53) en el espacio-tiempo. Supóngase un punto masa M en movimiento arbitrario. Sea L la línea de universo de ese punto masa en el espacio-tiempo. Sea $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$ un acontecimiento para el que se quiere calcular el campo gravitacional h_{ij} debido a M. El campo se obtiene de la siguiente manera:

i) Se construye con A como vértice el cono de luz del pasado.

ii) Se encuentra la intersección F de ese cono con la línea de universo L del punto masa.

iii) En F se construye el cuadrivector unitario tangente a L; este cuadrivector tiene por componentes covariantes: $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$.

iv) Se construye la recta apoyada en A y perpendicular al soporte del cuadrivector $\underline{v}_i$.

v) La distancia de A al soporte del cuadrivector $\underline{y}_i$ es p.

El campo en A está dado por (53).

Nótese que si

$$\underline{y}^x = \underline{y}^y = \underline{y}^z = 0$$

entonces $\underline{y}^1 = 1, \quad \underline{y}^2 = \underline{y}^3 = \underline{y}^4 = 0 \quad$ y $\quad |p| = r$.

En ese caso $$h_{ij} = \frac{M}{r}\,\delta_{ij} \quad .$$

Esto significa que en el marco de referencia inercial en el que el punto-masa en movimiento arbitrario está instantáneamente en reposo, el campo gravitacional se reduce al campo central de Birkhoff[4].

REFERENCIAS.

1. G.D.Birkhoff. Proc.Nat.Acad.Sci. 29, 232, (1943).
2. G.D.Birkhoff. Bol.Soc.Mat.Mexicana. 1, Nums.4,5, p.10, (1944).
3. L.Page y N.I.Adams. Electrodynamics. D.Van Nostrand & Co. New York (1940), p.119.
4. G.D.Birkhoff, Bol.Soc.Mat.Mexicana. 1, Nums.4,5, p.17, (1944).
5. L.Page y N.I.Adams. loc.cit. p.144.
6. C.Graef Fernández. Bol.Soc.Mat.Mexicana. 1, Nums.4,5, p.29, (1944).
7. G.D.Birkhoff. Bol.Soc.Mat.Mexicana. 1, Nums.4,5, p.13, (1944).